TD 11 : Réécriture

Ioana Pasca, Marc Lasson

Exercice 1. *Relations abstraites*

Soit X un ensemble non-vide quelconque, et notons $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X^2)$ l'ensemble des *relations binaires* sur X (aussi appelées *réductions*). On notera par $\rightarrow$ les éléments de $\mathcal{R}$ et par $x \rightarrow y$ l'appartenance du couple (x, y) à la relation $\rightarrow$. La composée de deux relations sera notée par la juxtaposition : $\rightarrow_1\rightarrow_2 = \{ (x, z) \mid \exists y, x \rightarrow_1 y \rightarrow_2 z \}$.
Soit P un prédicat sur les relations binaires ($\mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$).

1. Qu'est-ce que la clôture d'une relation R vis à vis de P ? Que doit satisfaire P ?

Soit $\rightarrow$ une relation ; on note :

$\leftarrow$	sa relation converse	$(\leftarrow = \{ (x, y) \mid y \rightarrow x \})$;
$\rightarrow^=$	sa clôture réflexive ;	
$\rightarrow^+$	sa clôture transitive ;	
$\rightarrow^*$	sa clôture réflexive et transitive ;	
$\leftrightarrow$	sa clôture symétrique ;	
$\leftrightarrow^*$	sa clôture réflexive, symétrique et transitive.	

La réduction $\rightarrow$ est dite :
- *nœthérienne* s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $x_i \rightarrow x_{i+1}$;
- *acyclique* s'il n'existe pas d'élément x tel que $x \rightarrow^+ x$;
- *finitaire* (ou *à branchement fini*) si pour tout élément x l'ensemble $\{ y \mid x \rightarrow y \}$ est fini ;
- *globalement finie* si pour tout élément x l'ensemble $\{ y \mid x \rightarrow^+ y \}$ est fini ;
- *bornée* si pour tout x il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas de y tel que $x \rightarrow^{n_x} y$.

2. Montrer que $\rightarrow^+$ est nœthérienne ssi $\rightarrow$ l'est aussi.

Démonstration.

$'' \Rightarrow''$ par contraposé
Si $\rightarrow$ n'est pas nœthérienne, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $x_i \rightarrow x_{i+1}$, donc en particulièr, pour tout i, $x_i \rightarrow^+ x_{i+1}$ donc $\rightarrow^+$ n'est pas nœthérienne.

$'' \Leftarrow''$ par contraposé
Si $\rightarrow^+$ n'est pas nœthérienne, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $x_i \rightarrow^+ x_{i+1}$. $a\rightarrow^+ b$ est equivalent à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ tels que $a = a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_n = b$. On peut donc costruire une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $z_i \rightarrow z_{i+1}$. Donc $\rightarrow$ n'est pas nœthérienne.

3. Dans les questions qui suivent, prouver les affirmations correctes ou donner un contre-exemple dans le cas contraire.

a) Une relation bornée est-elle nœthérienne ?

b) Une relation globalement finie est-elle bornée ? Est-elle nœthérienne ?

c) On suppose que $\to$ et $\to^*$ sont finitaires. $\to$ est-elle nœthérienne ?

d) On suppose $\to$ acyclique et $\to^*$ finitaire. $\to$ est-elle nœthérienne ?

Réponses.

a) Oui. Démonstration par contraposée : si la relation $\to$ n'est pas nœthŕienne alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \to x_{i+1}$. La relation $\to$ n'est pas bornée, car il existe $x = x_0$ t.q $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n$ et $x_0 \to^n x_n$.

b) Une relation globalement finie n'est pas forcement bornée.
Contre-exemple :
$\to := \{x \to x\}$ La relation $\to$ est globalement finie, car pour tout x l'ensemble $\{y | x \to^+ y\} = \{x\}$ donc il est fini.
Mais, la relation $\to$ n'est pas nœthérienne car il existe la suite infinie $x \to x \to x \to \dots$
D'après a) la relation $\to$ n'est pas bornée.

c) Non. Même contre-exemple que pour b).

d) Oui. On va montrer l'ennoncé equivalent :
Si $\to$ acyclique, alors $\to^*$ finitaire implique $\to$ nœthérienne.
Supposons $\to$ acyclique et montrons ($\to^*$ finitaire implique $\to$ nœthérienne) par contraposition. On suppose donc que $\to$ n'est pas nœthérienne. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \to x_{i+1}$ et tous les x_i sont distincts car $\to$ acyclique. En particulier on a $\forall i \in \mathbb{N}, x_0 \to^* x_i$, comme x_i sont tous distincts, $\to^*$ n'est pas finitaire.

Exercice 2. *Ordres*

1. Ordre lexicographique.
Soit A et B deux ensembles, $\geqslant_A$ une relation d'ordre sur A, $\geqslant_B$ une relation d'ordre sur B, $>_A$ l'ordre strict associé à $\geqslant_A$ et $>_B$ l'ordre strict associé à $\geqslant_B$.

a) Rappeler la définition de l'ordre lexicographique $>_{A\times B}$ associé à $>_A$ et $>_B$.

b) On donne la définition suivante :

$$(x, y) \geqslant_{A\times B} (x', y') :\Leftrightarrow (x >_A x') \vee (x = x' \wedge y \geqslant_B y')$$

Vérifier que $\geqslant_{A\times B}$ est la clôture reflexive de $>_{A\times B}$ et qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $A \times B$.

2. Ordre multi-ensemble.

a) Soit $(X, >)$, un ensemble ordonné, rappeler la définition de $>_{mul}$ extension de $>$ sur les multiensembles à support fini d'éléments de X.

b) Donner une définition plus simple quand $>$ est total.

3. Plongement d'un ordre dans $(\mathbb{N}, >)$.
On rappelle le lemme suivant :
Une réduction finitaire termine ssi il existe un plongement monotone dans $(\mathbb{N}, >)$.

a) Montrer que la restriction aux réductions finitaires est necessaire en analysant l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \text{sur } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ (i+1, j) \to (i, k) \\ (i, j+1) \to (i, j) \end{cases}$$

b) Que pensez vous de l'exemple suivant ?
$$\begin{cases} \text{sur } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ (i,j+1) \to (i,j) \\ (i+1,j) \to (i,j) \end{cases}$$

Réponses.

a) La reduction $\to$ n'est pas finitaire, car la valeur de k dans la première règle n'est pas contrainte dans le memebre gauche. On peut montrer que $\to$ termine à l'aide d'une construction lexicographique. Pourtant il n'existe pas de fonction monotone $\varphi : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \to) \to (\mathbb{N}, >)$. En supposant qu'un telle fonction monotone existe, on remarque que ca implique $k := \varphi(1,1) > \varphi(0,k) > \phi(0,k-1) > \ldots > \varphi(0,0)$. On obtient une contradiciton car il existent seulement k entiers naturels plus petits que k mais on en a $k+1$.

b) La relation est finitaire. On utilise le lemme avec l'application $\varphi : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \to) \to (\mathbb{N}, >)$, $\varphi(i,j) = i+j$. On voit facilement que φ est monotone.

Exercice 3. *Terminaison et PIBF*

1. Montrer la terminaison sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de :
$$\begin{cases} (i+1,j) \to (i,i) \\ (i,j+1)) \to (i,j) \end{cases}$$

Réponse.
On va utiliser un plongement dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ avec l'ordre lexicographique : $\varphi(i,j) = (i,j)$. Restent à montrer qu'il est monotone : $x \to x'$ implique $\varphi(x) >_{lex} \varphi(x')$. Immédiat, car $(i+1,j) >_{lex} (i,i)$ et $(i,j+1) >_{lex} (i,j)$.

2. Montrer que l'evaluation de la fonction d'Ackermann termine pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{cases} ack(0,n) \to n+1 \\ ack(m+1,0) \to ack(m,1)) \\ ack(m+1,n+1) \to ack(m, ack(m+1,n)) \end{cases}$$

Exercice 4. *TRS*

On considere $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ l'ensemble des termes sur la signature Σ à variables dans X.
On rappelle que une relation $>$ est un *ordre de réécriture* pour $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ si :
– c'est un ordre (transitif, irreflexif),
– elle est *compatible* : si $u > v$ alors
$$f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n) > f(t_1, \ldots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \ldots, t_n)$$
– elle est *close par substitution* : si $u > v$ alors pour toute substitution σ, $\sigma u > \sigma v$.
Un *ordre de réduction* est un ordre de réécriture nœthérien.
On rappelle le lemme du cours : *Un système de réécriture R termine si et seulement si il existe un ordre de réduction $>$ tel que pour toute règle $l \to r$ de R, on a $l > r$.*
Pour un terme s et une variable x on note $|s|$ la taille du terme et $|s|_x$ le nobmre d'apparitions de x dans s.

1. Montrez que l'ordre strict $>$ sur $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ défini par

$$s > t \text{ ssi } |s| > |t| \text{ et } \forall x \in X, |s|_x \geqslant |t|_x$$

est un ordre de reduction.

Réponses.
Il est facile de vérifier que $>$ est un ordre nœthérien.

Montrons que $>$ est compatible. Soit $u, v \in \mathcal{T}(\Sigma, X)$ t.q. $u > v$.
On a $|u| > |v|$ et donc

$$|f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n)| = 1 + \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |t_k| + |u| >$$

$$> 1 + \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |t_k| + |v| = |f(t_1, \ldots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \ldots, t_n)|$$

On a aussi $\forall x \in X, |u|_x \geqslant |v|_x$ et donc pour un x fixé

$$|f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n)|_x = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |t_k|_x + |u|_x \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |t_k|_x + |v|_x = |f(t_1, \ldots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \ldots, t_n)|_x$$

On obtient $f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n) > f(t_1, \ldots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \ldots, t_n)$.

Montrons que $>$ est clos par substitution. Soit $u, v \in \mathcal{T}(\Sigma, X)$ t.q. $u > v$ et soit σ une substitution. On rappelle que $Dom(\sigma)$ (l'ensemble de variables substituées par σ) est fini.

Montrons d'abord que pour tout terme t on a

$$|\sigma t| = |t| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |t|_x * (|\sigma(x)| - 1)$$

Faisons la preuve par induction sur la structure du terme t.

- Le cas : t est une variable. On a deux possibilités :
  - soit $t \in Dom(\sigma)$ et on a $\sigma t = \sigma(t)$, $|t|_x = 0$ si $x \neq t$ et $|t|_t = 1$. On obtient

$$|t| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |t|_x * (|\sigma(x)| - 1) = 1 + |t|_t * (|\sigma(t)| - 1) = 1 + 1 * (|\sigma(t)| - 1) = |\sigma(t)|$$

  - soit $t \notin Dom(\sigma)$ et on a $\sigma t = t$ et $\forall x \in Dom(\sigma), |t|_x = 0$. On obtient

$$|\sigma t| = |t| = |t| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |t|_x * (|\sigma(x)| - 1)$$

– Le cas : $t = f(t_1, \dots, t_n)$. On a :

$$|\sigma t| = |\sigma f(t_1, \dots, t_n)| = |f(\sigma t_1, \dots, \sigma t_n)| = 1 + \sum_{i=1}^{n} |\sigma t_i|$$

Par hypothèse d'induction on obtient :

$$|\sigma t| = 1 + \sum_{i=1}^{n}(|t_i| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |t_i|_x * (|\sigma(x)| - 1)) = 1 + \sum_{i=1}^{n} |t_i| + \sum_{i=1}^{n}(\sum_{x \in Dom(\sigma)} |t_i|_x * (|\sigma(x)| - 1))$$

Mais $1 + \sum_{i=1}^{n} |t_i| = |f(t_1, \dots, t_n)| = |t|$. Donc on a :

$$|\sigma t| = |t| + \sum_{i=1}^{n}(\sum_{x \in Dom(\sigma)} |t_i|_x * (|\sigma(x)| - 1)) = |t| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} (\sum_{i=1}^{n} |t_i|_x * (|\sigma(x)| - 1))$$

Par distributivité on obtient :

$$|\sigma t| = |t| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} (\sum_{i=1}^{n} |t_i|_x) * (|\sigma(x)| - 1)$$

Comme $\forall x, |t|_x = |f(t_1, \dots, t_n)|_x = \sum_{i=1}^{n} |t_i|_x$, on obtient :

$$|\sigma t| = |t| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |t|_x * (|\sigma(x)| - 1)$$

ce qui conclut la démonstration de la formule.

Donc on a en particulier pour u et v :

$$|\sigma u| = |u| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |u|_x * (|\sigma(x)| - 1)$$

$$|\sigma v| = |v| + \sum_{x \in Dom(\sigma)} |v|_x * (|\sigma(x)| - 1)$$

Comme $|u| > |v|$ et $\forall x, |u|_x \geqslant |v|_x$ on a $|\sigma u| > |\sigma v|$.
Fixons une variable x.

$$|\sigma u|_x = \sum_{y \in Dom(\sigma)} |u|_y * |\sigma(y)|_x$$

$$|\sigma v|_x = \sum_{y \in Dom(\sigma)} |v|_y * |\sigma(y)|_x$$

Cette formule peut se démontrer à l'aide d'une induction sur la structure du terme, laissée en exercice.
Comme $\forall x, |u|_x \geqslant |v|_x$ on a $\forall x, |\sigma u|_x > |\sigma v|_x$.

On a $>$ est un ordre nœthérien, compatible et clos par substitution, donc $>$ est un ordre de réduction.

2. Justifier ou infirmer la terminaison des systèmes de réécriture suivants :

(a) $f(f(x,x),y) \to f(y,y)$

(b) $\begin{cases} p(s(i),j) \to p(i,j) \\ p(i,s(j)) \to p(i,j) \end{cases}$

Réponses.

a) Non-terminant : $f(f(x,x),f(x,x)) \to f(f(x,x),f(x,x)) \to \dots$

b) Terminant. Par application du 1.