TD 11 : Réécriture

Ioana Pasca, Marc Lasson

Exercice 1. *Relations abstraites*

Soit X un ensemble quelconque, et notons $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X^2)$ l'ensemble des *relations binaires* sur X (aussi appelées *réductions*). On notera par $\rightarrow$ les éléments de $\mathcal{R}$ et par $x \rightarrow y$ l'appartenance du couple (x, y) à la relation $\rightarrow$. La composée de deux relations sera notée par la juxtaposition : $\rightarrow_1\rightarrow_2 = \{ (x, z) \mid \exists y, x \rightarrow_1 y \rightarrow_2 z \}$.
Soit P un prédicat sur les relations binaires ($\mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$).

1. Qu'est-ce que la clôture d'une relation R vis à vis de P ? Que doit satisfaire P ?

Soit $\rightarrow$ une relation ; on note :

$\leftarrow$	sa relation converse	$(\leftarrow = \{ (x, y) \mid y \rightarrow x \})$;
$\rightarrow^=$	sa clôture réflexive ;	
$\rightarrow^+$	sa clôture transitive ;	
$\rightarrow^*$	sa clôture réflexive et transitive ;	
$\leftrightarrow$	sa clôture symétrique ;	
$\leftrightarrow^*$	sa clôture réflexive, symétrique et transitive.	

La réduction $\rightarrow$ est dite :
– *nœthérienne* s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $x_i \rightarrow x_{i+1}$;
– *acyclique* s'il n'existe pas d'élément x tel que $x \rightarrow^+ x$;
– *finitaire* (ou *à branchement fini*) si pour tout élément x l'ensemble $\{ y \mid x \rightarrow y \}$ est fini ;
– *globalement finie* si pour tout élément x l'ensemble $\{ y \mid x \rightarrow^+ y \}$ est fini ;
– *bornée* si pour tout x il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas de y tel que $x \rightarrow^{n_x} y$.

2. Montrer que $\rightarrow^+$ est nœthérienne ssi $\rightarrow$ l'est aussi.

3. Dans les questions qui suivent, prouver les affirmations correctes ou donner un contre-exemple dans le cas contraire.

a) Une relation bornée est-elle nœthérienne ?

b) Une relation globalement finie est-elle bornée ? Est-elle nœthérienne ?

c) On suppose que $\rightarrow$ et $\rightarrow^*$ sont finitaires. $\rightarrow$ est-elle nœthérienne ?

d) On suppose $\rightarrow$ acyclique et $\rightarrow^*$ finitaire. $\rightarrow$ est-elle nœthérienne ?

Exercice 2. *Ordres*

1. Ordre lexicographique.
Soit A et B deux ensembles, $\geqslant_A$ une relation d'ordre sur A, $\geqslant_B$ une relation d'ordre sur B, $>_A$ l'ordre strict associé à $\geqslant_A$ et $>_B$ l'ordre strict associé à $\geqslant_B$.

a) Rappeler la définition de l'ordre lexicographique $>_{A\times B}$ associé à $>_A$ et $>_B$.

b) On donne la définition suivante :

$$(x, y) \geqslant_{A\times B} (x', y') :\Leftrightarrow (x >_A x') \vee (x = x' \wedge y \geqslant_B y')$$

Vérifier que $\geqslant_{A\times B}$ est la clôture reflexive de $>_{A\times B}$ et qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $A \times B$.

2. Ordre multi-ensemble.

a) Soit $(X, >)$, un ensemble ordonné, rappeler la définition de $>_{mul}$ extension de $>$ sur les multiensembles à support fini d'éléments de X.

b) Donner une définition plus simple quand $>$ est total.

3. Plongement d'un ordre dans $(\mathbb{N}, >)$.
On rappelle le lemme suivant :
Une réduction finitaire termine ssi il existe un plongement monotone dans $(\mathbb{N}, >)$.

a) Montrer que la restriction aux réductions finitaires est necessaire en analysant l'exemple suivant :
$$\begin{cases} \text{sur } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (i+1, j) \to (i, k) \\ (i, j+1) \to (i, j) \end{cases}$$

b) Que pensez vous de l'exemple suivant ?
$$\begin{cases} \text{sur } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (i, j+1) \to (i, j) \\ (i+1, j) \to (i, j) \end{cases}$$

Exercice 3. *Terminaison*

1. Montrer la terminaison sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de :
$$\begin{cases} (i+1, j) \to (i, i) \\ (i, j+1)) \to (i, j) \end{cases}$$

2. Montrer que l'evaluation de la fonction d'Ackermann termine pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{cases} ack(0, n) \to n + 1 \\ ack(m+1, 0) \to ack(m, 1)) \\ ack(m+1, n+1) \to ack(m, ack(m+1, n)) \end{cases}$$

Exercice 4. *TRS*

On considere $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ l'ensemble des termes sur la signature Σ à variables dans X.
On rappelle que une relation $>$ est un *ordre de réécriture* pour $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ si :
– c'est un ordre (transitive, irreflexive),
– elle est *compatible* : si $u > v$ alors

$$f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \ldots, t_n) > f(t_1, \ldots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \ldots, t_n)$$

– elle est *close par substitution* : si $u > v$ alors pour toute substitution σ, $u\sigma > v\sigma$.

Un *ordre de réduction* est un ordre de réécriture nœthérien.
On rappelle le lemme du cours : *Un système de réécriture R termine si et seulement si il existe un ordre de réduction $>$ tel que pour toute règle $l \to r$ de R, on a $l > r$.*
Pour un terme s et une variable x on note $|s|$ la taille du terme et $|s|_x$ le nombre d'apparitions de x dans s.

1. Montrez que l'ordre strict $>$ sur $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ défini par

$$s > t \text{ ssi } |s| > |t| \text{ et } \forall x \in X, |s|_x \geqslant |t|_x$$

est un ordre de reduction.

2. Justifier ou infirmer la terminaison des systèmes de réécriture suivants :

(a) $f(f(x,x),y) \to f(y,y)$

(b) $\begin{cases} p(s(i),j) \to p(i,j) \\ p(i,s(j)) \to p(i,j) \end{cases}$