TD 12 : Réécriture

Ioana Pasca, Marc Lasson

Exercice 1. *Relations Abstraites*

Soit X un ensemble non-vide quelconque, et notons $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X^2)$ l'ensemble des *relations binaires* sur X (aussi appelées *réductions*). On notera par $\to$ les éléments de $\mathcal{R}$ et par $x \to y$ l'appartenance du couple (x, y) à la relation $\to$.
La réduction $\to$:
– est *confluente* si $\leftarrow^*\to^* \subseteq \to^*\leftarrow^*$;
– est *semi-confluente* si $\leftarrow\to^* \subseteq \to^*\leftarrow^*$;
– est *localement confluente* si $\leftarrow\to \subseteq \to^*\leftarrow^*$;
– possède la *propriété du diamant* si $\leftarrow\to \subseteq \to\leftarrow$.

1. Dessinez des "diagrammes" correspondant à ces quatre notions. Qui implique qui ? Quel est l'intérêt de la confluence ?

On appele *forme normale* un élément x de X tel qu'il n'existe aucun y tel que $x \to y$.
La réduction $\to$ est dite :
– *normalisante* si tout élément x admet une forme normale ($x \to^* y \not\to$) ;
– *convergente* si elle est confluente et nœthérienne ;

2. Dans les questions qui suivent, prouver les affirmations correctes ou donner un contre-exemple dans le cas contraire.

a) Une réduction nœthérienne est-elle normalisante ? Et réciproquement ?
b) On suppose que $\to$ est telle que tout élément admet une et une seule forme normale. Est-elle confluente, nœthérienne ?
c) Une réduction normalisante, confluente et acyclique est-elle nœthérienne ?
d) Une relation dont la clôture réflexive et transitive est nœthérienne est-elle confluente ?

Exercice 2. *Knuth-Bendix*

1. Soit Σ un alphabet et $>_{lex}$ l'ordre lexicographique sur les mots de l'alphabet. Montrer que l'ordre length-lexicographique $>_{ll}$ défini comme suit :

$$x >_{ll} y \Leftrightarrow |x| > |y| \text{ ou } (|x| = |y| \text{ et } x >_{lex} y)$$

est admissible et terminant.

2. Rappeler la procédure de Knuth-Bendix pour les systèmes de réécriture de mots.

Soit $\Sigma = \{a, \overline{a}, b, \overline{b}\}$ et soit

$$R = \{a\overline{a} \to e, \overline{a}a \to e, b\overline{b} \to e, \overline{b}b \to e, ba \to ab, b\overline{a} \to \overline{a}b, \overline{b}a \to a\overline{b}, \overline{b}\overline{a} \to \overline{a}\overline{b}\}$$

3. Appliquer KB avec l'ordre length-lexicographique $>_{ll}$ induite par $a < \overline{a} < b < \overline{b}$.

4. Appliquer KB avec l'ordre length-lexicographique $>_{ll}$ induite par $\overline{b} < a < \overline{a} < b$.

Exercice 3.

Une règle $l \to r$ est appelée **lineaire à gauche** (resp. **à droite**) si toutes les variables apparaisent au plus une fois dans l (resp. r). La règle est appelle **lineaire** s'elle est lineaire à gauche et à droite. Un TRS est appelé lineaire à gauche (resp. lineaire à droite, resp. lineaire) si toutes ses règles sont lineaire à gauche (resp. lineaire à droite, resp. lineaire).

Deux terms s_1 et s_2 sont **fortement joignable** par rapport à $\to$ s'il exists les termes t_1 et t_2 tels que $s_1 \to^= t_1 \leftarrow^* s_2$ and $s_1 \to^* t_1 \leftarrow^= s_2$.

Montrer que si R est lineaire et toute paire critique de R est fortement joignable, alors R est fortement confluent.

Exercice 4.

On appelle R **reduit à gauche** si pour tout $(l \to r) \in R$, l est en forme normale par rapport à $R - \{l \to r\}$.

1. Montrer que si un TRS est reduit à gauche, terminant et clos (en anglais, ground) alors il est confluent.

2. Soit E un ensemble fini de identites closes sur Σ et soit $>$ un ordre de réduction qui est total sur les termes clos sur Σ. Décrire un algorithm qui transforme E dans un TRS R fini, reduit à gauche t.q. $\approx_E = \approx_R$ et $R \subseteq >$ (où $\approx_E$ est l'égalité engendre par l'ensemble des identités E).

3. Conclure que le problème du mot est decidable pour un ensemble fini des identités closes.

Exercice 5. *Interprétations Polynomiales*

1. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il termine ou non en utilisant la méthode d'interpretation polynômiale.

a) $\begin{cases} x + 0 \to x \\ x + S(y) \to S(x+y) \\ x \times 0 \to 0 \\ x \times S(y) \to (x \times y) + x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \neg\neg x \to x \\ \neg(x \wedge y) \to (\neg x) \vee (\neg y) \\ \neg(x \vee y) \to (\neg x) \wedge (\neg y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \neg\neg x \to x \\ \neg(x \vee y) \to (\neg x) \vee (\neg y) \\ \neg(x \wedge y) \to (\neg x) \wedge (\neg y) \\ x \wedge (y \vee z) \to (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ (x \vee y) \wedge z \to (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(f(x,y),z) \to f(x, f(y,z)) \\ f(x, f(y,z)) \to f(y,y) \end{cases}$

e) $\begin{cases} or(x,y) \to x \\ or(x,y) \to y \\ f(a,b,x) \to f(x,x,x) \end{cases}$

f) $\begin{cases} a(0,x) \to s(x) \\ a(s(x),0) \to a(x, s(0)) \\ a(s(x), s(y)) \to a(x, a(s(x), y)) \end{cases}$

2. Prouver que si un système de réécriture R peut être prouvé terminant grâce à cette méthode, alors on peut trouver une constante $c > 0$ telle que pour tout terme t, on peut borner le nombre de réductions à partir de t par $2^{2^{c|t|}}$.

Indice : Soit $a \in \mathcal{A}$, prendre $c \geqslant km + \log d$ avec k, m et d tels que

$$a \leqslant d \text{ et } \forall f \in \Sigma_h : f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_h) \leqslant d \cdot \prod_{i=1}^{h} {a_i}^k \text{ et } h \leqslant m$$

et essayez de borner $\pi_a(t)$ où π_a est le morphisme qui envoie toutes les variables sur a.

3. En déduire que vous ne pouviez pas faire le dernier exemple avec cette méthode.