# Modèles de Kripke - Syntaxe du calcul des prédicats

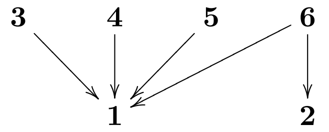
## 1 Modèles de Kripke

### 1.1 Mise en bouche

**Question 1.** *Rappeler la définition des modèles de Kripke.*

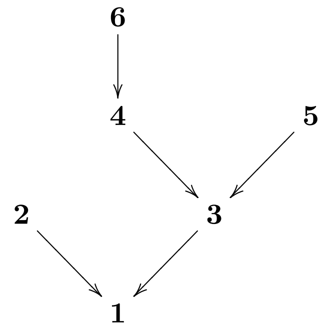
**Question 2.** *Énoncer la correction et la complétude des modèles de Kripke.*

Soit l'univers $\mathcal{M}_1$ :




avec $\mathbf{3} \Vdash a, \mathbf{5} \Vdash a, \mathbf{5} \Vdash b, \mathbf{6} \Vdash b$

et l'univers $\mathcal{M}_2$ :




avec $\mathbf{1} \Vdash b, \mathbf{2} \Vdash a, \mathbf{4} \Vdash c$

**Question 3.** *Préciser quels mondes des univers $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ forcent les formules suivantes :*

$$a \qquad b \qquad c \qquad \neg a \qquad \neg b \qquad \neg c \qquad a \to b \qquad b \to a \qquad a \wedge b \qquad a \vee b \qquad a \to b \to a$$

$$(\neg a \to a) \to a \qquad c \to a \qquad c \to b \qquad \bot \qquad c \vee a \qquad (a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to c$$

**Question 4.** *Prouver que pour toute formule $p$, si $m \Vdash p$ et $m' \geq m$ alors $m' \Vdash p$.*

**Question 5.** *Pour chacune des formules suivantes, donner une preuve en logique classique et un contre-modèle de Kripke :*

$$\neg\neg X \to X \qquad (X \to Y) \vee (Y \to X) \qquad \neg X \vee \neg\neg X \qquad (X \to Y) \vee X \vee \neg Y$$

$$(X \to Y) \to \neg X \vee Y \qquad (\neg X \to \neg Y) \to Y \to X$$

**Question 6.** *Soit $\Gamma$ un ensemble de formules. Construisez un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ (qui dépend de $\Gamma$), tel que pour tout $A$, $\Gamma \vdash_i A$ si et seulement si $\Vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ (on dit d'un tel modèle qu'il est complet pour $\mathcal{K}$).*

### 1.2 Morphismes zig-zag

(Exercice tiré du livre *Introduction à la logique* de David, Nour et Raffalli)

Soient $\mathcal{K}_1 = (|\mathcal{K}_1|, \leq_1, \Vdash_1)$ et $\mathcal{K}_2 = (|\mathcal{K}_2|, \leq_2, \Vdash_2)$ deux modèles de Kripke du calcul propositionnel. Un *zig-zag morphisme* est une fonction $\varphi$ de $|\mathcal{K}_1|$ dans $|\mathcal{K}_2|$ telle que

- $\varphi$ est croissante,
- Pour tout $\alpha_1 \in |\mathcal{K}_1|$, $\alpha_1 \Vdash_1 X$ ssi $\varphi(\alpha_1) \Vdash_2 X$,
- Pour tout $\alpha_1 \in |\mathcal{K}_1|$ et tout $\beta_2 \in |\mathcal{K}_2|$ tel que $\varphi(\alpha_1) \leq_2 \beta_2$, il existe $\beta_1 \geq \alpha_1$ tel que $\varphi(\beta_1) = \beta_2$.

**Question 7.** *Montrer que si $\varphi$ est un zig-zag morphisme, $\alpha_1 \in |\mathcal{K}_1|$ et $A$ est une formule, on a $\alpha_1 \Vdash_1 A$ ssi $\varphi(\alpha_1) \Vdash_2 A$.*

## 2 Calcul des prédicats

**Question 8.** *Rappeler les quatre règles concernant les quantificateurs du premier ordre en déduction naturelle.*

**Question 9.** *Montrer dans NJ ou NK :*

$$\vdash \forall x.(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\forall x.P) \wedge (\forall x.Q)$$
$$\forall x.(P \to Q) \Leftrightarrow (P \to \forall x.Q) \;\; \textit{avec } x \textit{ Pas libre dans } P \quad \vdash \neg\forall x.P \Leftrightarrow \exists x.\neg P$$

On rappelle les règles associées à l'égalité :

$$=\text{-Intro}\ \frac{}{\Gamma \vdash t = t} \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x] \qquad \Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash A[t'/x]}\ =\text{-Elim}$$

**Question 10.** *Prouver la symétrie et la transitivité de =.*

**Question 11.** *Montrer (dans NK surtout) :*

$$\vdash \forall x.P(x) \to \exists y.P(y) \qquad \vdash \exists x.\forall y.(R(x) \to R(y))$$
$$\vdash \exists x.\forall y.[S(y) \to R(x)] \to [S(x) \to R(y)] \quad \vdash \exists x.\forall y.[[R(f(x)) \to R(f(y))] \to R(x)] \to R(y)$$