Correction - Théories mathématiques

1 Théories Mathématiques

Question 1. – *Associativité :* $\forall x\, y, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- *Neutre :* $\forall x, x \cdot e = x$ *et* $\forall x, e \cdot x = x$,
- *Inverse :* $\forall x, x^{-1} \cdot x = e$.

Question 2. *On s'autorise allègrement à effacer les hypothèses dont on ne servira pas. La preuve du premier est en deux morceaux :*

$$\dfrac{\dfrac{}{a \cdot x = a \cdot y \vdash a \cdot x = a \cdot y}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Associativité}\\ \vdots\end{array}}{\vdash a^{-1} \cdot (a \cdot y) = (a^{-1} \cdot a) \cdot y} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Inverse}\\ \vdots\end{array}}{\vdash e = a^{-1} \cdot a} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\textit{Neutre}\\ \vdots\end{array}}{\vdash x = e \cdot x}}{\vdash x = (a^{-1} \cdot a) \cdot x}\,{=_E}}{\vdash x = a^{-1} \cdot (a \cdot x)}\,{=_E}}{a \cdot x = a \cdot y \vdash x = a^{-1} \cdot (a \cdot y)}\,{=_E}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Neutre}\\ \vdots\end{array}}{\vdash e \cdot y = y} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Inverse}\\ \vdots\end{array}}{\vdash a^{-1} \cdot a = e} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Associativité}\\ \vdots\end{array}}{\vdash a^{-1} \cdot (a \cdot y) = (a^{-1} \cdot a) \cdot y} \quad a \cdot x = a \cdot y \vdash x = a^{-1} \cdot (a \cdot y)}{a \cdot x = a \cdot y \vdash x = (a^{-1} \cdot a) \cdot y}\,{=_E}}{a \cdot x = a \cdot y \vdash x = e \cdot y}\,{=_E}}{\dfrac{a \cdot x = a \cdot y \vdash x = y}{\vdash a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y}\,{\Rightarrow_I}}\,{=_E}}{\vdash \forall y\, a, a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y}\,{\forall_I}}{\vdash \forall x\, y\, a, a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y}\,{\forall_I}$$

Exercice supplémentaire si vous avez du mal : compléter les trous et trouver le nom des règles utilisées. On obtient le deuxième en utilisant la preuve précédente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Inverse}\\ \vdots\end{array}}{\vdash x \cdot x^{-1} = e} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \forall x\, y\, a, a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y}{\vdash \forall\, y\, a, a \cdot x^{-1} = a \cdot y \Rightarrow x^{-1} = y}}{\vdash \forall\, a, a \cdot x^{-1} = a \cdot y \Rightarrow x^{-1} = y}}{\vdash x \cdot x^{-1} = x \cdot y \Rightarrow x^{-1} = y}}{\vdash e = x \cdot y \Rightarrow x^{-1} = y} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x \cdot y = e \vdash x \cdot y = e} \quad \dfrac{}{x \cdot y = e \vdash x \cdot y = x \cdot y}}{x \cdot y = e \vdash e = x \cdot y}}{x \cdot y = e \vdash x^{-1} = y}}{\vdash x \cdot y = e \Rightarrow x^{-1} = y}}{\dfrac{\vdash \forall y, x \cdot y = e \Rightarrow x^{-1} = y}{\vdash \forall x\, y, x \cdot y = e \Rightarrow x^{-1} = y}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \forall x\, y, x \cdot y = e \Rightarrow x^{-1} = y}{\vdash \forall z, (x \cdot y) \cdot z = e \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = z}}{\vdash (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Associativité}\\ \vdots\end{array}}{x \cdot (y \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})) = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})} \quad \vdash x \cdot (y \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})) = e}{\vdash (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e}}{\vdash (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}}}{\dfrac{\vdash \forall y, (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}}{\vdash \forall x\, y, (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Associativité}\\ \vdots\end{array}}{(y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = y \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Inverse}\\ \vdots\end{array}}{\vdash e = y \cdot y^{-1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Neutre}\\ \vdots\end{array}}{\vdash e \cdot x^{-1} = x^{-1}} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\textit{Inverse}\\ \vdots\end{array}}{\vdash x \cdot x^{-1} = e}}{\vdash x \cdot (e \cdot x^{-1}) = e}}{\vdash x \cdot ((y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1}) = e}}{\vdash x \cdot (y \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})) = e}$$

Pfiouuu... j'espère que ça intéresse quelqu'un !

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \forall x\, y\, a, a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y}{\vdash x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x \to x^{-1} = x} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x, x \cdot x = e \vdash \forall x, x \cdot x = e}}{\forall x, x \cdot x = e \vdash x^{-1} \cdot x^{-1} = e} \quad \dfrac{\overset{\textit{Inverse}}{\vdots}}{\vdash e = x^{-1} \cdot x}}{\forall x, x \cdot x = e \vdash x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x}}{\forall x, x \cdot x = e \vdash x^{-1} = x}}{\forall x, x \cdot x = e \vdash \forall x, x^{-1} = x}$$

Question 3. *Ce n'est pas si dur à retenir, il y a 2 axiomes pour le successeur, 2 pour l'addition et 2 pour la multiplication. Plus le schéma d'induction.*

1. A_1 : $\forall x, s(x) \neq 0$,
2. A_3 : $\forall x\, y, s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$,
3. A_4 : $\forall x\, y, x + 0 = x$,
4. A_5 : $\forall x\, y, x + s(y) = s(x + y)$,
5. A_6 : $\forall x\, y, x \times 0 = 0$,
6. A_7 : $\forall x\, y, x \times s(y) = x \times y + x$.

Et pour chaque proposition P dont les variables libres sont incluses dans $\{x_1, ..., x_n, x\}$,

$$\forall x_1 ... x_n, (P[0/x] \Rightarrow (\forall x, P \Rightarrow P[s(x)/x]) \Rightarrow \forall x, P.$$

Ce qui revient à rajouter la règle (exercice : vérifiez-le : il faut montrer qu'on peut prouver n'importe instance du schéma d'axiome grâce à cette règle et montrer qu'on peut remplacer l'utilisation de cette règle dans une preuve par une invoquation d'une instance).

$$\dfrac{\Gamma \vdash P[0/x] \qquad \Gamma, P \vdash P[s(x)/x]}{\Gamma \vdash \forall x, P}\; x \notin \Gamma$$

On rajoute parfois l'axiome A_2 $\forall x, x = 0 \vee \exists y, s(y) = x$ qui est pourtant démontrable. Il suffit de prendre $x = 0 \vee \exists y, s(y) = x$ pour P dans le schéma d'induction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0 = 0}}{\vdash 0 = 0 \vee \exists y, s(y) = 0} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x = 0 \vee \exists y, s(y) = x \vdash s(x) = s(x)}}{x = 0 \vee \exists y, s(y) = x \vdash \exists y, s(y) = s(x)}}{x = 0 \vee \exists y, s(y) = x \vdash s(x) = 0 \vee \exists y, s(y) = s(x)}}{\vdash \forall x, x = 0 \vee \exists y, s(y) = x}$$

1. *On peut montrer la neutralité (à droite) :*

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash 0 + 0 = 0} \quad \dfrac{\dfrac{}{s(0 + x) = 0 + s(x)}\, A_4 \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{0 + x = x \vdash x = 0 + x} \quad \dfrac{}{0 + x = x \vdash s(x) = s(x)}}{0 + x = x \vdash s(0 + x) = s(x)}}{0 + x = x \vdash 0 + s(x) = s(x)}}{\vdash \forall x, 0 + x = x}$$

2. *La commutativité de + :*

$$\dfrac{\dfrac{y + 0 = y\; \dfrac{0 + y = y\; \dfrac{\dfrac{}{\vdash y = y}}{\vdash 0 + y = y}}{\vdash 0 + y = y + 0}}{\vdash \forall y, 0 + y = y + 0} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall y, x + y = y + x \vdash s(x) = s(x)}}{\forall y, x + y = y + x \vdash s(x) = 0 + s(x)}\, 0 + s(x) = s(x)}{\forall y, x + y = y + x \vdash s(x) + 0 = 0 + s(x)}\, s(x) + 0 = s(x) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash s(s(y + x)) = s(s(x + y))}}{\Gamma \vdash s(s(y + x)) = s(x + s(y))}\, s(x + s(y)) = s(s(x + y)}{\Gamma \vdash s(s(y + x)) = s(s(y) + x)}\, s(s(y) + x) = s(x + s(y)}{\Gamma \vdash s(y + s(x)) = s(s(y) + x)}\, s(y + s(x)) = s(y + s(x)}{\Gamma \vdash s(y + s(x)) = s(y) + s(x)}\, s(y) + s(x) = s(s(y) + x}{\Gamma \vdash s(s(x) + y) = s(y) + s(x)}\, s(s(x) + y) = s(x) + s(y}{\Gamma \vdash s(x) + s(y) = s(y) + s(x)}\, s(x) + s(y) = s(s(x) + y}{\forall y, x + y = y + x \vdash s(x) + y = y + s(x)}}{\vdash \forall x\, y, x + y = y + x}$$

où $\Gamma = \forall y, x + y = y + x, s(x) + y = y + s(x)$.